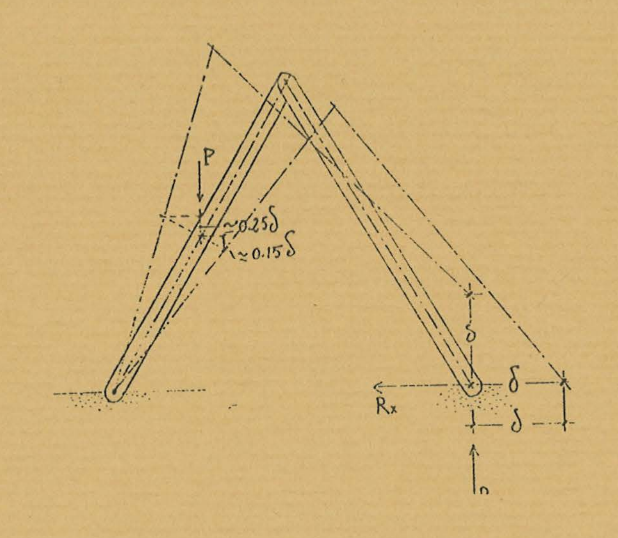
EQUILIBRIO ESTÁTICO DEL SÓLIDO INDEFORMABLE

por

Luis San Salvador Ageo



CUADERNOS
DEL INSTITUTO
JUAN DE HERRERA
DE LA *Escuela de
Arquitectura
de Madrid*

EQUILIBRIO ESTÁTICO DEL SÓLIDO INDEFORMABLE

por

Luis San Salvador Ageo

CUADERNOS
DEL INSTITUTO
JUAN DE HERRERA
DE LA *ESCUELA DE
ARQUITECTURA
DE MADRID*

Equilibrio estático del sólido indeformable

Instituto Juan de Herrera.
Escuela Técnica Superior de Arquitectura de Madrid.
CUADERNO 58.01
ISBN: 84-920297-5-7
Depósito Legal: M-35395-1997

MECANICA DEL SOLIDO INDEFORMABLE

Equilibrio del sólido indeformable en el plano

Fuerzas son entes físicos capaces de comunicar aceleración a masas. En el sistema internacional la unidad de fuerza es el *newton : fuerza capaz de comunicar a una masa de un kilogramo una aceleración de un metro por segundo en cada segundo.* Como la atracción de la tierra comunica a una masa de un kilogramo una aceleración de 9.8 m/s^2 decimos que la tierra atrae a esa masa de 1 kilogramo con una fuerza de 9.8 newtons que llamamos kilopondio o kilogramo fuerza.

Empezaremos con el estudio de sistemas de fuerzas en el plano. Además de resultar más sencillo, será casi exclusivamente el único necesario, tanto para poder abordar los conceptos que se estudien durante el curso, como el proyecto de estructuras de la arquitectura en general.

Además de la ley *fuerza = masa x aceleración*, de la observación de la naturaleza también deducimos que las fuerzas se componen y descomponen según la ley del paralelogramo (Fig. 1 (a)), fundamento de los razonamientos que tendrán lugar a continuación. Esta ley coincide con la definición de suma de vectores. De hecho las fuerzas se identifican perfectamente con el concepto de vector deslizante. Es importante tener en cuenta esta realidad, que simplifica notablemente el trabajo, ya que todo lo que haya quedado demostrado para los sistemas de vectores deslizantes (se supone al alumno cómodo en el manejo de las principales propiedades de esta estructura físico-matemática) podrá aplicarse por extensión a los sistemas de fuerzas. Así, por ejemplo, el teorema de Varignon aplicado a fuerzas concurrentes en el plano, del que haremos uso después (*el momento de un sistema de fuerzas con respecto a un punto es igual al momento de la resultante*) no es más que la expresión de la propiedad distributiva del producto vectorial. El producto vectorial quedará expresado mediante "∧" y el escalar mediante (.).

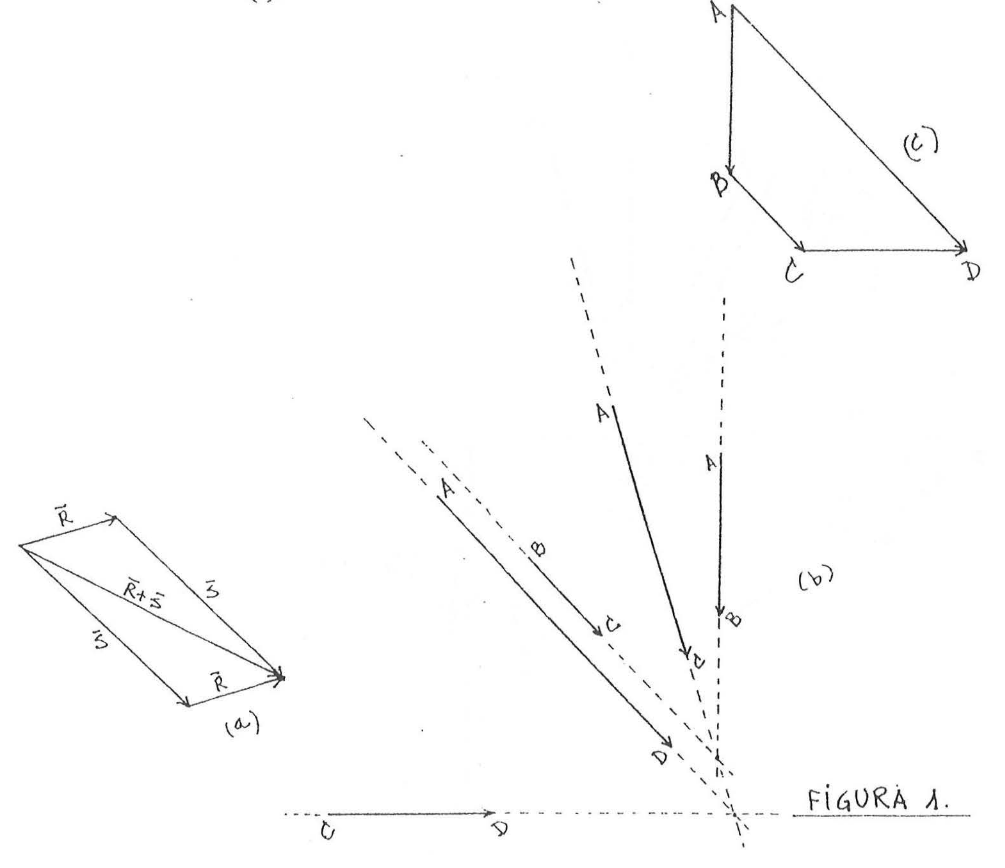
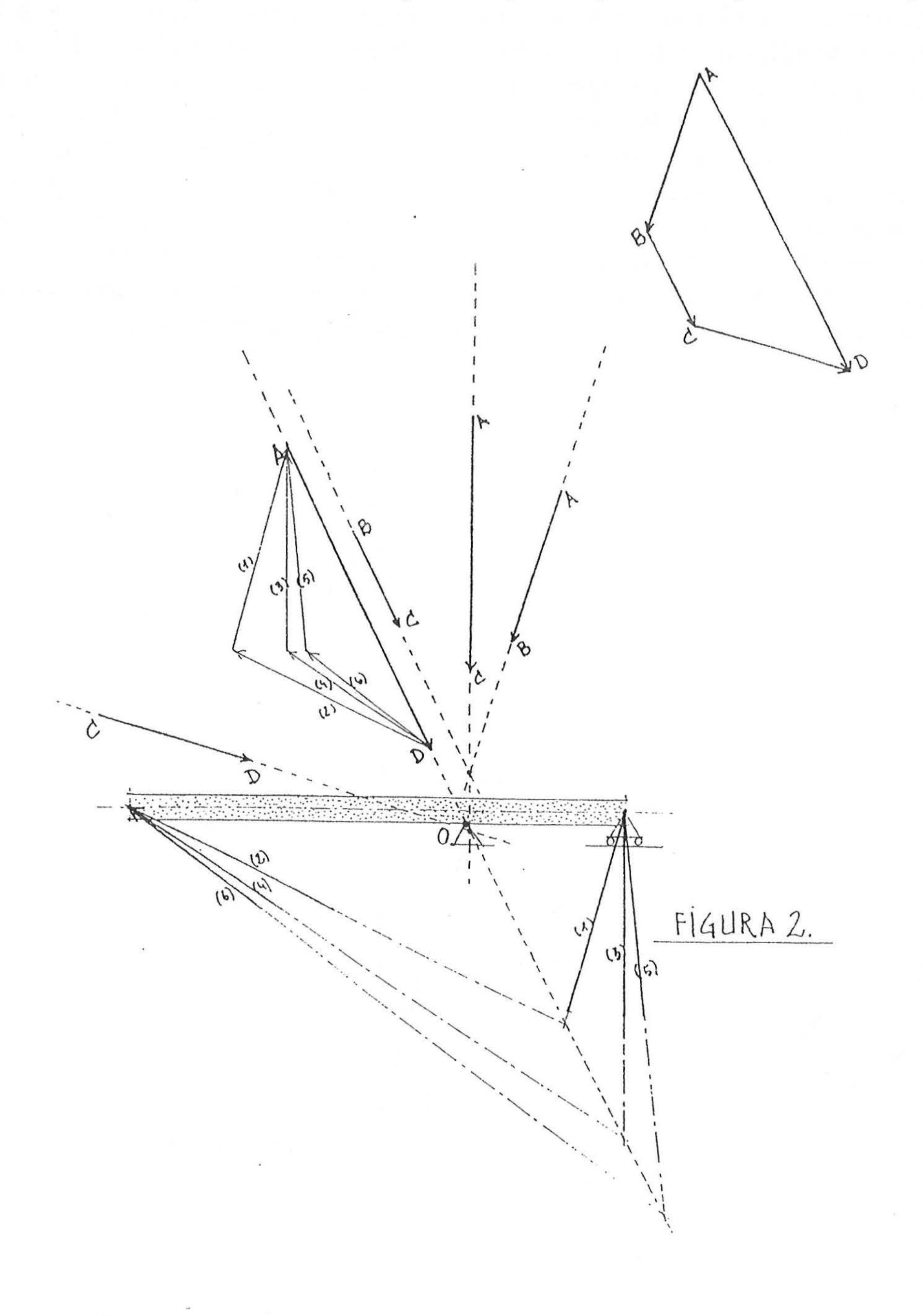


FIGURA 1.

En la figura 1 (b) está representado un sistema de fuerzas **AB**, **BC** y **CD** (las fuerzas-vectores serán representadas en negrita, y sus módulos en tipografía normal) que dan lugar a una resultante global **AD.** Cuando las fuerzas se representan con dos letras, el orden de éstas indica el sentido. Se ha obtenido **AD** mediante la aplicación sucesiva de la ley del paralelogramo. Se construye primero un *polígono de fuerzas* (Fig. 1 (c)) del que por adición vectorial se van obteniendo dos a dos las resultantes parciales que dan lugar a una resultante global **AD ; AC** = **AB** + **BC ; AD** = AC + **CD** ;

En la figura 2 se interpone al sistema anterior una estructura (una barra sustentada en sus extremos) que le oponga resistencia. Existen muchos modos de conseguir el equilibrio. Uno inmediato consistiría en apoyar la barra en el punto O en lugar de en sus extremos. El equilibrio quedaría restablecido mediante una fuerza **DA** en O de sentido contrario a **AD** y sobre la línea de acción de ésta. En la figura 2 se muestran además, otros modos de alcanzar el equilibrio. Si la barra se encuentra sustentada en sus extremos la composición de las reacciones en estos (una vez más según la ley del paralelogramo, o adición vectorial) debe dar lugar a la fuerza **DA** opuesta a **AD** y, repetimos, sobre la línea de ésta. Las parejas de reacciones **(1)(2)**, (3)(4), (5)(6)... cumplen todos los requisitos que aseguran el equilibrio. Aunque las



posibilidades son infinitas el resultado puede quedar univocamente determinado si conocemos alguna característica de las condiciones de apoyo. Así, por ejemplo, si en el extremo derecho soportamos la estructura mediante un *apoyo en dilatación* (capaz de transmitir al terreno únicamente un esfuerzo perpendicular al plano de apoyo, reacción **(3)**), la reacción en el extremo izquierdo debe ser **(4)**, que sumada vectorialmente a **(3)** producen **DA** sobre la línea de acción de **AD**.

Aunque las posibilidades de encontrar equilibrio son infinitas y quedarán determinadas por las condiciones de soporte hay algunas imposibles para el tipo de estructura que estamos considerando. Así, por ejemplo, si en lugar de pasar **DA** sobre la línea de acción de **AD**, pasara sobre una paralela, el sistema **AB**, **BC**, **CD** y **DA**, tendería a hacer girar la estructura, no estaría en equilibrio.

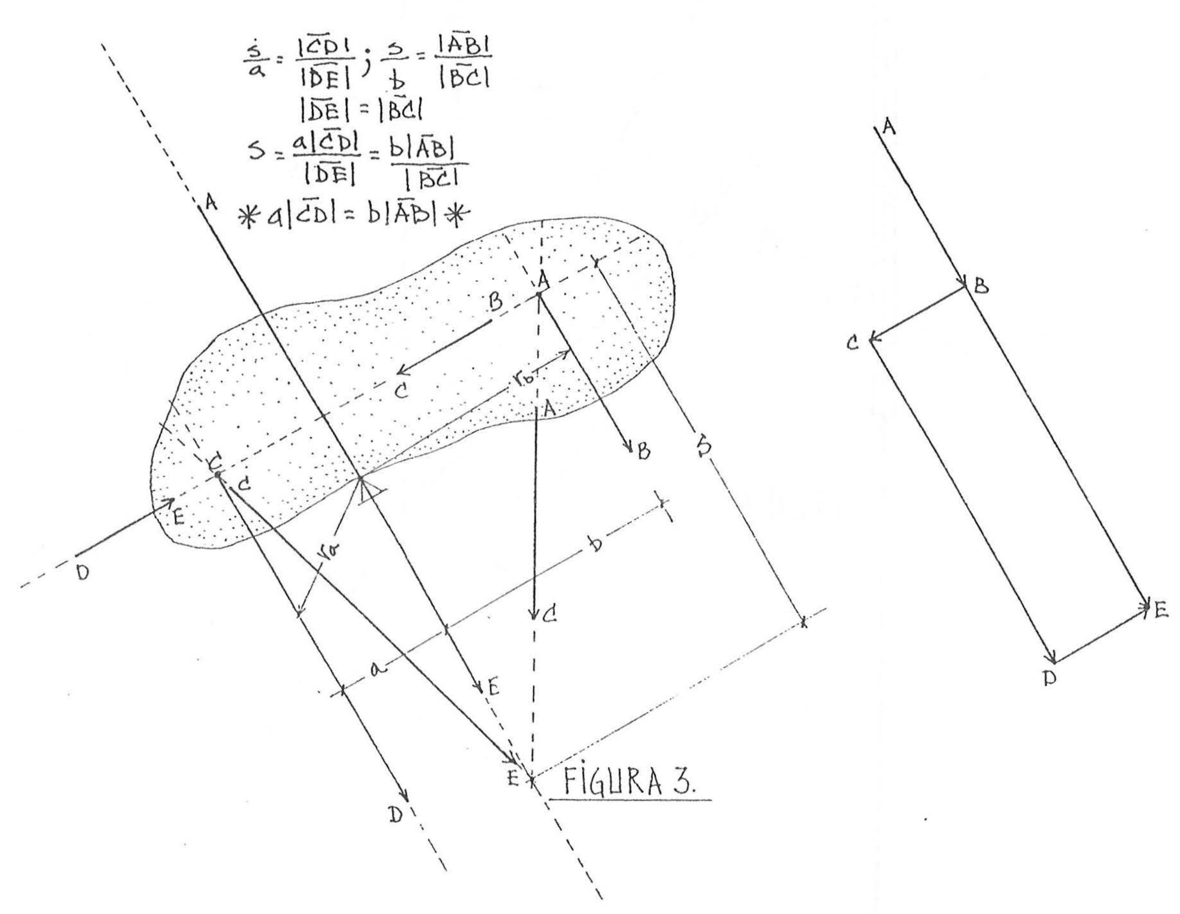


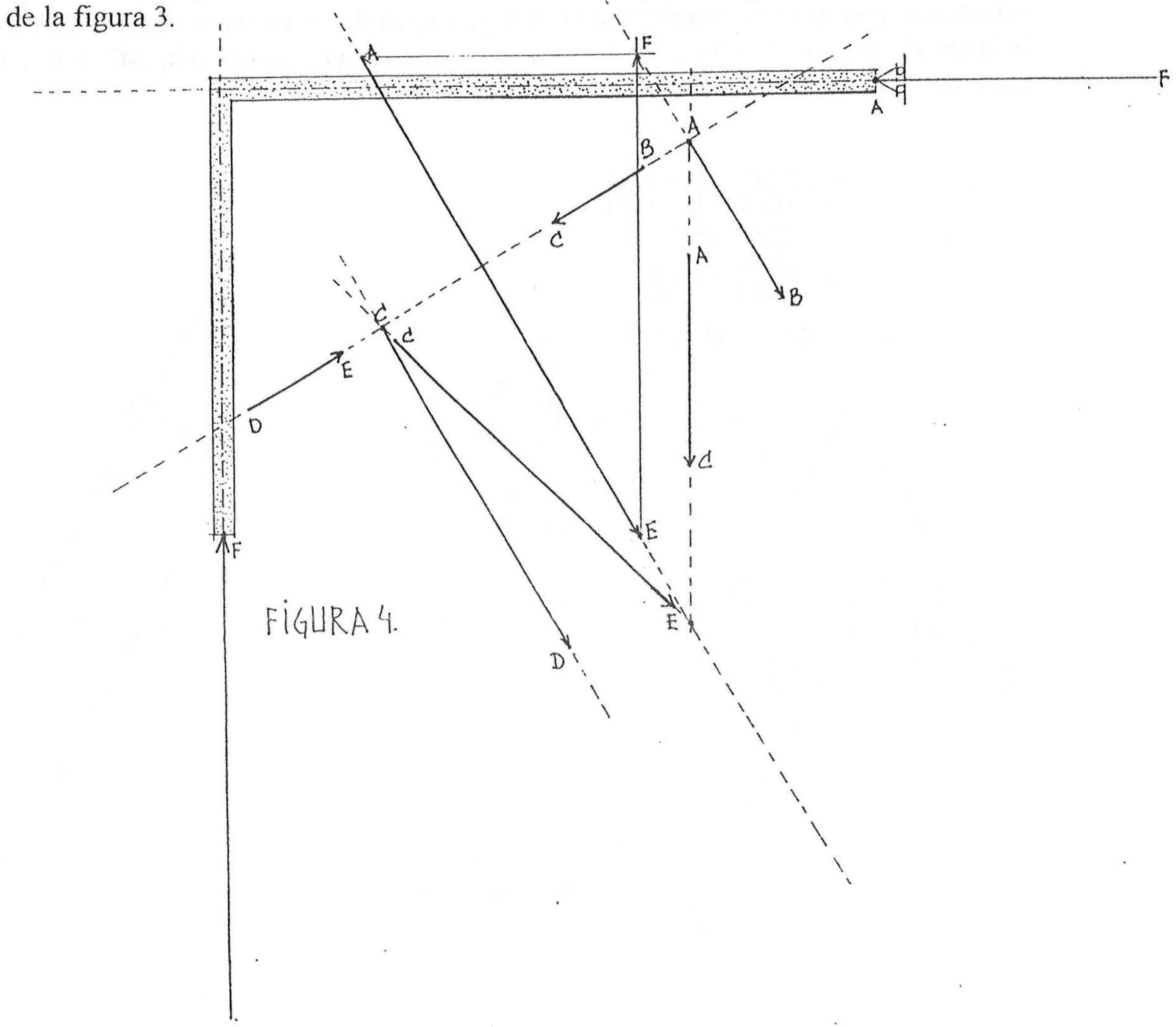
FIGURA 3.

Consideremos ahora un sistema de fuerzas paralelas de distinta magnitud **AB** y **CD** (figura 3), actuando sobre un sólido. Si añadimos otras dos fuerzas de igual magnitud, sobre la misma línea de acción, pero de sentidos opuestos **DE** y **BC**, el sistema no queda alterado pues estas dos fuerzas se contrarrestan, y nos permite la combinación de fuerzas, mediante las reglas anteriores, para obtener la resultante del sistema **AE** y su línea de acción.

En la figura 3 se deduce la relación analítica que existe entre las fuerzas **CD**, **AB** y sus distancias al punto de aplicación de la resultante. Para restablecer el equilibrio podemos aplicar al sistema una fuerza **EA**, sobre la misma línea de acción de **AE** a base de apoyar el sólido sobre el que actúa el sistema, en el punto que se indica en la figura. Queda así puesta en evidencia la ley de la palanca que en términos clásicos se enuncia, *potencia* (AB) *por su brazo* (b) *es igual a resistencia* (CD) *por el suyo* (a), y vectorialmente $\mathbf{r_b} \wedge \mathbf{AB} + \mathbf{r_a} \wedge \mathbf{CD} = \mathbf{0}$, esto es, *la suma de los momentos de las fuerzas con respecto al punto de apoyo es cero.*

Tanto el sistema de la figura 2 como el de la 3 muestran que la resultante debe ser opuesta a la fuerza que restablece el equilibrio y por tanto sus momentos con respecto a cualquier punto del plano cero. Así pues, teniendo en cuenta el teorema de Varignon podemos decir que todo sistema en equilibrio produce un momento nulo con respecto a cualquier punto.

En la figura 4 se muestra otra solución de equilibrio para la acción del sistema de la figura 3.



Consideremos un sistema más. En la figura 5 se muestran dos fuerzas **AB** y **CD**, del mismo módulo, sentidos contrarios y líneas de acción diferentes. Al igual que en el caso de la figura 3, añadimos al sistema dos fuerzas **AC** y **CA**. Comprobamos que no hay forma de restablecer el equilibrio oponiendo una fuerza a la resultante del sistema. No hay *una resultante*, si no más bien dos, paralelas, de igual magnitud y sentidos opuestos a las que llamamos indistintamente *par* o *momento*. Para obtener el equilibrio debemos oponer otro *par* al *momento* resultante.

En la figura 5 (1) se demuestra que el valor del momento (par) es igual al módulo de una de las fuerzas por el brazo del par y en (3) se demuestra que el valor del momento es independiente del punto del plano desde el que se tomen. AC y CA forman

$$\left|\vec{OP}\times\vec{AB}+\vec{OQ}\times(-\vec{AB})\right|=\left|(\vec{OP}+\vec{QO})\times\vec{AB}\right|=\left|\vec{QP}\times\vec{AB}\right|=|\vec{QP}|\times|\vec{AB}|\operatorname{sen}\alpha=|\vec{AB}|\times s \quad (1)$$

$$\vec{OP}\times\vec{AC}+\vec{OQ}\times(-\vec{AC})=\vec{OP}\times(\vec{AB}+\vec{BC})+\vec{OQ}\times(\vec{CD}+\vec{DA})=\vec{OP}\times\vec{AB}+\vec{OQ}\times\vec{CD}=\vec{OP}\times\vec{AB}+\vec{OQ}(-\vec{AB}) \quad (2)$$

$$\vec{O'P}\times\vec{AB}+\vec{O'Q}\times(-\vec{AB})=(\vec{O'O}+\vec{OP})\times\vec{AB}+(\vec{O'O}+\vec{OQ})\times(-\vec{AB})=\vec{OP}\times\vec{AB}+\vec{OQ}\times(-\vec{AB}) \quad (3)$$

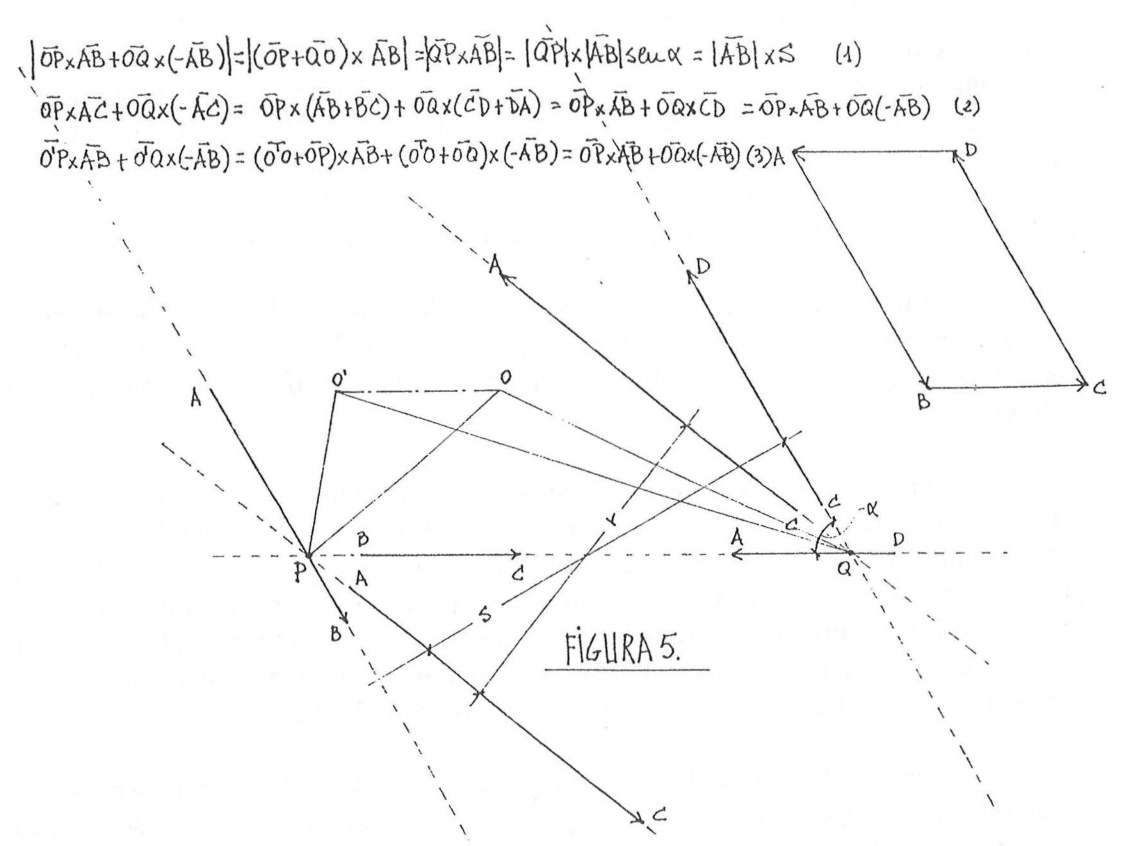


FIGURA 5.

un par, resultado de combinarse **AB** con **BC** y **CD** con **CA**, equivalente al **AB**, **CD**, y por tanto AC x r = AB x s, lo que está puesto en evidencia en Figura 5 (2).

En la figura 6 se opone al sistema una estructura formada por dos barras inclinadas apoyadas en sus extremos. Vamos a calcular el par que habría que oponer al inicial **AB**, **CD** para restablecer el equilibrio. Como el extremo derecho solamente puede admitir una reacción vertical, también será vertical la reacción del soporte izquierdo. El brazo del par es por tanto 15.6 ; 5.2 x 8.9 = 15.6 x R ; R = 2.9 ; Las unidades son genéricas y

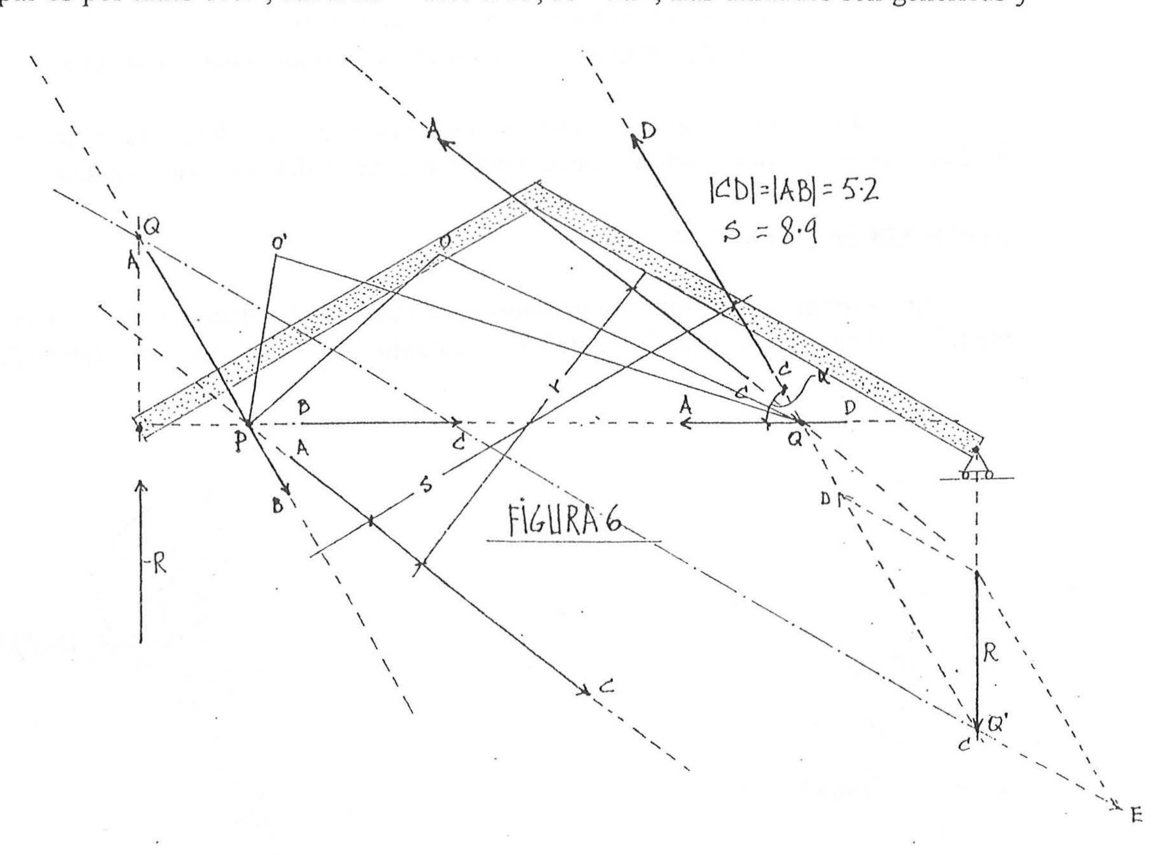


FIGURA 6

han sido tomadas de la figura en forma proporcional a los valores de las representaciones de distancias y fuerzas. En la figura también se muestra un procedimiento gráfico para la obtención de ese par basado en los razonamientos anteriores. Componemos la fuerza **CD** con **CE** para obtener **R**, perpendicular al plano de apoyo. La dirección de **CE** la da la recta que une los puntos Q y Q´ que se obtienen como intersección de las líneas de acción de **AB** y **-R** y de **CD** y **R**. El par equivalente al **AB**, **CD** estará formado por **R** y **-R** y las reacciones por sus fuerzas opuestas.

Cualquier otro sistema de fuerzas que consideremos quedará incluido en uno de los tipos estudiados hasta ahora o se ajustará a una combinación de ellos. Podemos concluir por tanto que todos se reducen, bien a una fuerza que pasa por un punto, o a un momento.

En el primero de los casos el equilibrio se consigue mediante una fuerza opuesta a la resultante que tiene su misma línea de acción. Así pues el polígono de fuerzas del sistema compuesto de acciones y reacciones debe ser cerrado. Esto se cumple si las proyecciones de las fuerzas con respecto a dos ejes cualesquiera, y en particular con respecto a dos ejes ortogonales (que a menudo consideramos los horizontal y vertical de trabajo) es cero. Además, aplicando el teorema de Varignon, concluimos que el momento de ese sistema con respecto a cualquier punto del plano es cero.

Cuando el sistema se reduce a un momento ha quedado claro que para conseguir el equilibrio debe oponérsele otro momento. Así pues, también en este caso se cumplen las condiciones de que el sistema de lugar a un polígono de fuerzas cerrado (cualquier *par* cumple esta condición) y de que los momentos del sistema con respecto a cualquier punto del plano sean cero.

Podemos concluir por tanto que para que para que un sistema de fuerzas esté en equilibrio deben cumplir las conocidas ecuaciones de la estática :

$\Sigma X = 0$ Suma de las componentes horizontales cero
$\Sigma Y = 0$ Suma de las componentes verticales cero
$\Sigma M = 0$ Suma de los momentos respecto a un punto cualquiera cero

Insistimos en que aunque la proyección de las fuerzas se ha hecho respecto a los ejes horizontal y vertical podría haberse hecho respecto a dos ejes cualesquiera.

Principio de los trabajos virtuales

En la figura 7 a) se muestra un sólido que sufre un desplazamiento pequeño pero general. El centro de gravedad se desplaza del punto O al O´ y a continuación se gira el

FIGURA 7 a).

FIGURA 7 b).

sólido un ángulo δα alrededor del punto O´. El desplazamiento del punto O tiene lugar mediante una translación horizontal δx seguida de una vertical δy. En b) de esa misma figura se muestra otro desplazamiento también general del sólido. Ahora el desplazamiento de O a O´ tiene lugar mediante una rotación δβ alrededor de A seguida de una rotación δγ alrededor de B. Podríamos optar por otros modos de mover el sólido pero siempre encontraríamos que para hacerlo de un modo general necesitamos de tres parámetros : *La posición de un sólido en el plano queda definida por tres grados de libertad.*

Si multiplicamos cada una de las ecuaciones de equilibrio por un desplazamiento en la dirección de su acción deberá seguir cumpliéndose :

$$(\delta x)(\Sigma X) = 0 \; ; \; (\delta y)(\Sigma Y) = 0 \; ; \; (\delta\alpha)(\Sigma M) = 0$$

Estas relaciones triviales (existen muchas otras si consideramos el polígono de fuerzas proyectado sobre otros ejes. Naturalmente $(\delta\alpha)(\Sigma M) = 0$ será siempre la misma sean cuales sean los ejes sobre los que proyectemos) encierran el *principio de los trabajos virtuales*, que vamos a tratar de desentrañar con la ayuda de algunos ejemplos.

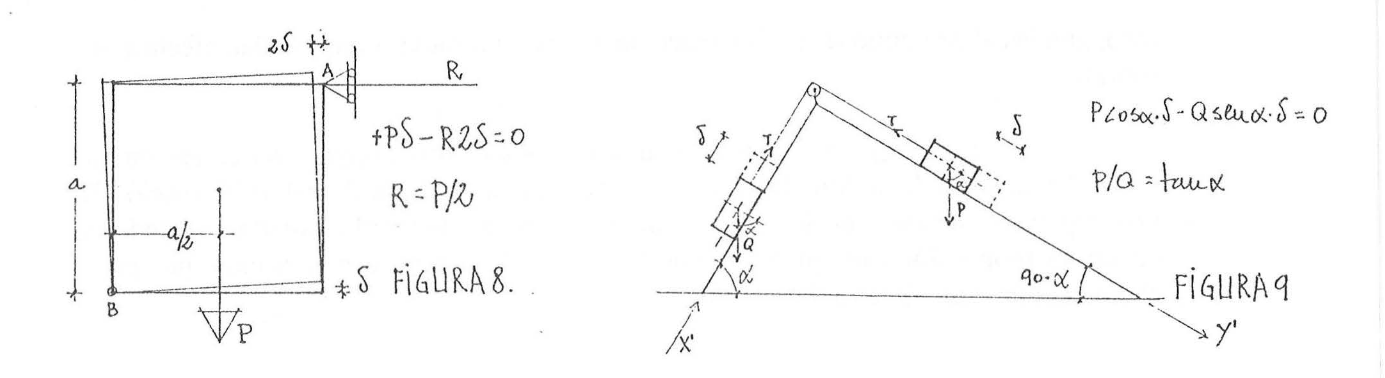


FIGURA 8. FIGURA 9

En la figura 8 se nos muestra un bloque de peso P soportado mediante un apoyo en dilatación en A y otro alrededor del cual puede girar. Se trata de hallar la reacción en A : $(\delta\alpha)(\Sigma M) = (\delta\alpha)(Pa/2 - Ra) = P\delta - R2\delta = 0$: *a partir de una posición de equilibrio de un sólido, el trabajo virtual de las fuerzas exteriores es cero.* Entendemos por trabajo virtual el producido por las fuerzas reales cuando recorren desplazamientos virtuales, esto es, desplazamientos compatibles con las ligaduras a que está sometido el cuerpo. En el caso que venimos de considerar el bloque puede únicamente girar alrededor del punto B, y éste sería el desplazamiento virtual.

En el caso de la figura 9 son dos bloques apoyados en sendos planos sin rozamiento los que deben estar en equilibrio. Los bloques pueden desplazarse a lo largo de los ejes X´ e Y´. Las ecuaciones triviales con que comenzamos nuestro razonamiento son :

$$(\delta x')(\Sigma X') = 0 \; ; \; (\delta y')(\Sigma Y') = 0 \; ; \text{ o bien, } (\delta x')(\Sigma X') + (\delta y')(\Sigma Y') = 0 \; ;$$
$$\delta(-Q\text{sen}\alpha + T) + \delta(P\cos\alpha - T) = 0 \text{ o bien, } -\delta Q\text{sen}\alpha + \delta P\cos\alpha = 0 \; ;$$

Una vez más vuelve a aparecer que el trabajo de las fuerzas exteriores para un desplazamiento virtual (compatible con las ligaduras a que está sometido el sistema) es cero. En este caso las ecuaciones de partida no están referidas a los ejes horizontal y vertical si no a los que marcan el movimiento de cada uno de los bloques, cosa que podemos hacer, ya que si el polígono de fuerzas es cerrado, como insistimos anteriormente, su proyección debe anularse para cualquier eje sobre el que proyectemos. Para cada uno de los bloques podíamos haber elegido dos ejes ortogonales paralelos a los horizontal y vertical del dibujo, pero esto hubiese dado lugar a un razonamiento más engorroso. Precisamente la belleza del principio de los trabajos virtuales radica en que prescindimos de muchos de los movimientos posibles para quedarnos únicamente con los que efectivamente pueden tener lugar. T se refiere a la tensión del cable y produce efectos contrarios en ambos bloques. Este es siempre el

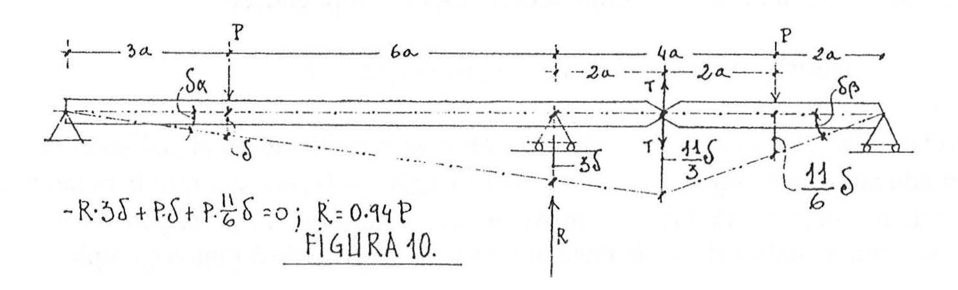


FIGURA 10.

caso, gracias al principio de acción reacción, cuando un movimiento virtual afecta a dos sólidos.

En la figura 10 tenemos una viga sobre tres apoyos con cargas en sus vanos. En el vano de la derecha la viga esta articulada. Se trata de hallar la reacción R. Los descensos virtuales de los puntos que nos interesan han sido hallados teniendo en cuenta la proporción que guardan unos con otros. T se refiere a la acción que, en la charnela, una viga ejerce sobre la otra :

$(\delta\alpha)(\Sigma M) + (\delta\beta)(\Sigma M) = 0$ o bien $(\delta\alpha)(3aP - 9aR + 11aT) - (\delta\beta)(4aT - 2aP) = \delta P - 3\delta R + 11/3(\delta)T - 11/3(\delta)T + 11/6(\delta)P = -3\delta R + P\delta + 11/6(\delta)P = 0$

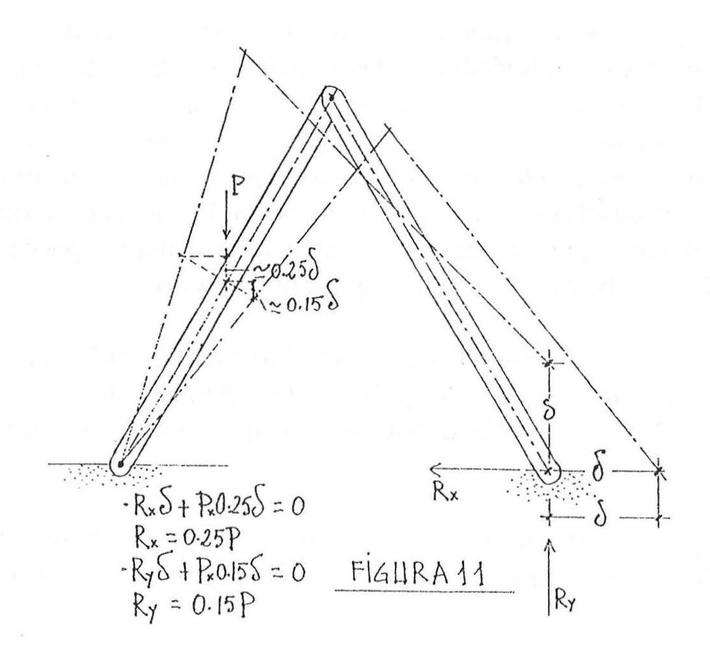


FIGURA 11

En el último ejemplo, figura 11, hemos escrito directamente las ecuaciones que establecen el principio de los trabajos virtuales una vez que en los ejemplos anteriores ha quedado clara la validez del procedimiento. De haber comenzado con las ecuaciones básicas hubiésemos tenido que escribir algunas de las de equilibrio de cada uno de los sólidos, multiplicarlas por los desplazamientos virtuales correspondientes, sumarlas y de ahí obtener una ecuación, cuyos elementos, representan unidades de trabajo. Este es el procedimiento general para obtener el principio de los trabajos virtuales en las distintas ramas de la mecánica. En muchos casos (en el de sólidos deformables por ejemplo, con el que llegaremos a estar muy familiarizados) las relaciones básicas están dadas por ecuaciones diferenciales que expresan el equilibrio a nivel de punto. Se multiplican esas ecuaciones por funciones arbitrarias (virtuales) y mediante la integración por partes o mediante alguna de las formas de los teoremas de Green, en el plano, o de la divergencia en el espacio se obtienen los esfuerzos y desplazamientos en el contorno, cuyo trabajo, mas el interno del sólido debe igualarse a cero.

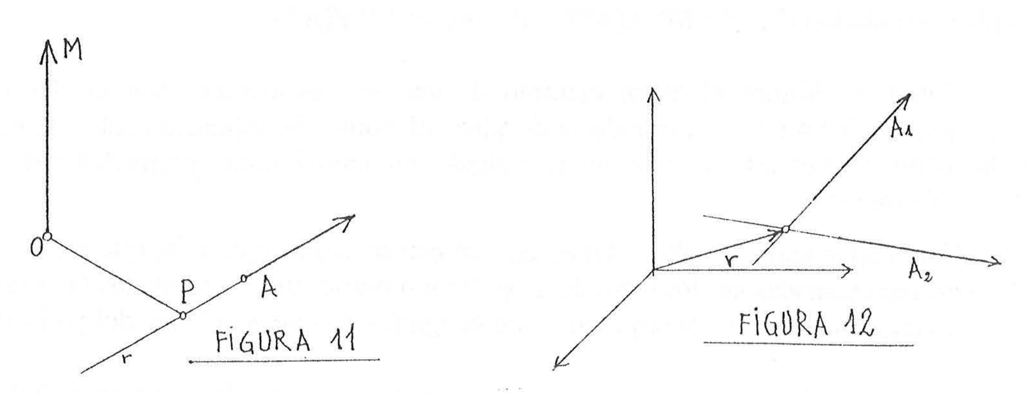
En el ejemplo de la figura 10 los desplazamientos virtuales de la fuerza P han sido obtenidos midiendo directamente sobre la figura así que son solamente aproximados.

Por último, volvamos a la figura 7 b) y veamos que si quedan anulados los giros respecto a los puntos A, B y O′ el sólido está en equilibrio. Esto muestra de un modo sencillo el conocido teorema de los tres momentos : *todo sistema con momentos nulos respecto a tres puntos no alineados está en equilibrio.*

Equilibrio del sólido indeformable en el espacio

Para el estudio del equilibrio del sólido indeformable en el espacio cobra especial importancia el concepto de vector deslizante. Los vectores deslizantes son aquellos para los cuales la definición de igualdad, más restrictiva que la de los vectores libres, es la siguiente : "*Dos vectores son iguales cuando tienen : a) igual módulo ; b) igual dirección y sentido ; c) están situados sobre una misma recta* ".

Por consiguiente, para dar un vector deslizante hay que dar el vector libre que determina su módulo, dirección y sentido y, además, la recta que lo contiene (Figura 11).



Sea **A** un vector contenido en la recta r y O un punto fijo del espacio. Siendo **P** un punto cualquiera de r (representamos por **P** al vector OP), sabemos que el *momento* **M** de **A** respecto de O es :

$$(1) \qquad \mathbf{M} = \mathbf{P} \wedge \mathbf{A} .$$

Dado el momento **M** y el vector **A**, queda determinada la recta *r*, es decir : *un vector deslizante queda determinado por el vector libre de igual módulo, dirección y sentido, más su momento respecte de un punto fijo O.*

Por tanto, para determinar un vector deslizante daremos el par (**A**,**M**), con la condición de que los vectores **A**,**M** estén ligados por la relación

$$(2) \qquad \mathbf{A}.\mathbf{M} = \mathbf{0}$$

como se deduce de (1).

De aquí y de las propiedades del producto triple de vectores se deduce fácilmente : la condición para que dos vectores deslizantes ($\mathbf{A_1}$,$\mathbf{M_1}$), ($\mathbf{A_2}$,$\mathbf{M_2}$) estén sobre rectas concurrentes (Figura 12):

$$\mathbf{A_1}.\mathbf{M_2} = \mathbf{A_1}.(\mathrm{r}\wedge\mathbf{A_2}) = \mathbf{A_2}.(\mathbf{A_1}\wedge\mathrm{r}) = -\mathbf{A_2}.\mathbf{M_1}$$

$$\mathbf{A_1}.\mathbf{M_2} + \mathbf{A_2}.\mathbf{M_1} = \mathbf{0}$$

Un ¨*sistema de vectores deslizantes*¨ es un conjunto de tales vectores. Si éstos son ($\mathbf{A_1}$,$\mathbf{M_1}$) , ($\mathbf{A_2}$,$\mathbf{M_2}$) ,.... ($\mathbf{A_n}$,$\mathbf{M_n}$) se llaman *componentes* del sistema a las dos sumas $\mathbf{A}^* = \sum\mathbf{A_i}$, $\mathbf{M}^* = \sum\mathbf{M_i}$. Dos sistemas se dicen *equivalentes* cuando tienen iguales componentes. Si las componentes $\mathbf{A}^*$,$\mathbf{M}^*$ de un sistema cumplen la condición (2), o sea, $\mathbf{A}^*.\mathbf{M}^* = \mathbf{0}$, el sistema es equivalente a un vector deslizante. Si es $\mathbf{A}^* = \mathbf{0}$ el sistema es equivalente a un *par* y la dirección de la componente no nula $\mathbf{M}^*$ se llama eje del par.

Para sumar sistemas se suman las componentes respectivas. Con estas definiciones se tiene el siguiente importante teorema:

Todo sistema de vectores deslizantes equivale a la suma de un vector deslizante y un par cuyo eje es paralelo al vector.

En efecto, basta poner $(\mathbf{A}^*,\mathbf{M}^*) = (\mathbf{A}^*,\mathbf{M}^*-\lambda\mathbf{A}^*) + (\mathbf{0},\lambda\mathbf{A}^*)$.

y determinar λ por la condición de que el primer sumando sea un vector, o sea, se cumpla la condición (2), $\mathbf{A}^*.\mathbf{M}^*-\lambda(\mathbf{A}^*)^2 = \mathbf{0}$, $\lambda=(\mathbf{A}^*.\mathbf{M}^*)/(\mathbf{A}^*)^2$.

Como ya dijimos el mejor ejemplo de vectores deslizantes son las fuerzas, puesto que su efecto no varía cuando se desplaza el punto de aplicación sobre la recta que las contiene. Por esto, todo lo anterior puede enunciarse como propiedades de los sistemas de fuerzas.

Como aplicación del último teorema, demostrar, como ejercicio, que el sistema de fuerzas representadas por los lados de un polígono plano, todas orientadas en sentido acorde, es equivalente a un par cuyo momento es igual a dos veces el área del polígono.

A continuación se muestra un ejemplo numérico que ayude a concretar todo lo expuesto acerca de vectores deslizantes (fuerzas) en el espacio. Se trata de hallar la resultante, el par resultante y la línea de acción de un sistema de fuerzas **A** y **B**, cuyas líneas de aplicación pasan por los puntos $\mathbf{r_A}$ y $\mathbf{r_B}$ del espacio (Figura 13).

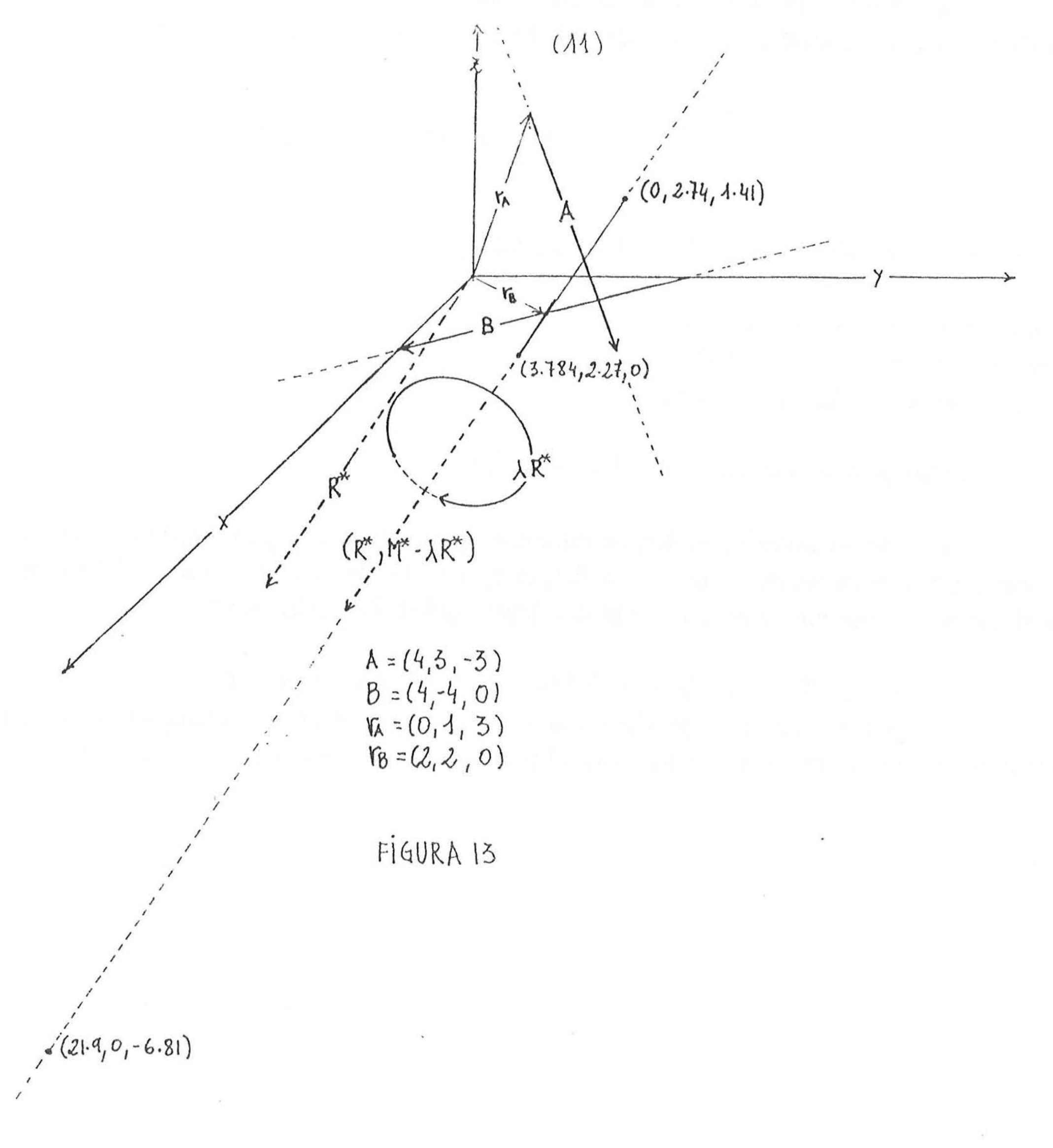


FIGURA 13

$\mathbf{A} = (4,3,-3)$; $\mathbf{B} = (4,-4,0)$; $\mathbf{r_A} = (0,1,3)$; $\mathbf{r_B} = (2,2,0)$;

$$\mathbf{M_A} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 0 & 1 & 3 \\ 4 & 3 & -3 \end{vmatrix} = -12\mathbf{i} + 12\mathbf{j} - 4\mathbf{k}$$

$$\mathbf{M_B} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 2 & 2 & 0 \\ 4 & -4 & 0 \end{vmatrix} = -16\mathbf{k}$$

$\mathbf{R^*} = \mathbf{A}+\mathbf{B} = (8,-1,-3)$; $\mathbf{M^*} = \mathbf{M_A} + \mathbf{M_B} = (-12, 12,-20)$;

Evidentemente $\mathbf{R^*}.\mathbf{M^*} \neq 0$ y $\lambda = -48/74 = -0.648$

$\lambda\mathbf{A^*} = (-5.184, 0.648, 1.944)$; $\mathbf{M^*} - \lambda\mathbf{A^*} = (-6.816, 11.352, -21.944)$

Así pues el sistema resultante $(\mathbf{A^*},\mathbf{M^*}-\lambda\mathbf{A^*}) + (\mathbf{0},\lambda\mathbf{A^*})$ es igual a :

[(8,-1,-3),(-6.816,11.352,-21.944)] + [(0,0,0),(-5.184,0.648,1.944)]

Podemos comprobar que efectivamente que las componentes de la primera expresión entre corchetes cumplen la condición (2) y por tanto son las de un vector : (8,-1,-3).(-6.816,11.352,-21.944) = 0.048 ≅ 0

Para poder representar gráficamente todo esto necesitamos saber en que puntos corta la línea de acción del vector (**eje central**) a los planos x=0,y=0 y z=0 ;

$$\begin{vmatrix} i & j & k \\ x & y & z \\ 8 & -1 & -3 \end{vmatrix} = -6.816i+11.352j-21.944k$$

$-3y+z=-6.816$; $8z+3x=11.352$; $-x-8y=-21.944$;

para $y=0$ $z=-6.81$, $x=21.944$;
para $x=0$ $y=2.743$ $z=1.413$;
para $z=0$ $x=3.784$ $y=2.272$;

Estos puntos que dan señalados en la figura.

De todo lo anterior podemos concluir que para que haya equilibrio habrá que oponer a la resultante del sistema una fuerza aplicada sobre una cierta recta del espacio, y al par otro momento. Por tanto para que haya equilibrio tendremos :

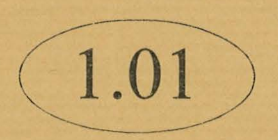
$$\Sigma X=0 \ ; \ \Sigma Y=0 \ ; \ \Sigma Z=0 \ ; \ \sum Mx=0 \ ; \ \sum My=0 \ ; \ \sum Mz=0$$

Además, la resultante producirá un momento con respecto a cualquier punto del espacio que quedará contrarrestado por el momento de la fuerza que se le oponga.

NOTAS

NOTAS

CUADERNO



CATÁLOGO Y PEDIDOS EN
http://www.aq.upm.es/of/jherrera
jherrera@aq.upm.es